$3^{ème}$ T_2
Durée : 2 Heures
Date : le 20/ 04 / 2006
Coefficient : 3

Devoir de Contrôle N°3
Mathématiques

Lycée Secondaire Teboulba

Exercice N°1: (8 points)

Soit f une fonction définie sur $]1;+\infty[$. On donne ci-dessous son tableau de variations.

x	1		3		$+\infty$
f'	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	$\searrow$	$\frac{5}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

De plus on admet que, pour tout x élément de $]1;+\infty[$, $f(x)$ peut s'écrire sous la forme : $f(x) = ax + \dfrac{b}{x-c}$, où a, b et c sont trois réels (avec a et b non nuls) que l'on se propose de déterminer à partir d'indications fournies par le tableau de variations de f.
On appelle $\mathscr{C}$ la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité graphique $2cm$.

1. Quel est le nombre de solutions dans $]1;+\infty[$ de l'équation $f(x) = 3$? Expliquer.

2. **a)** Utiliser le tableau de variations pour justifier l'existence d'une droite $\boldsymbol{D}$ asymptote à $\mathscr{C}$. Donner une équation de $\boldsymbol{D}$.
b) En déduire la valeur de c.

3. A partir de cette question, on suppose que $c = 1$.
a) Calculer $f'(x)$ en fonction de a et de b.
b) A l'aide du tableau, trouver deux relations entre a et b. Calculer alors a et b.

4. A partir de cette question, on suppose que : $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 4}{2(x-1)}$

Montrer que la droite $\boldsymbol{D'}$ d'équation $y = \dfrac{1}{2}x$ est asymptote à $\mathscr{C}$.

5. Résoudre dans $]1;+\infty[$ l'équation $f(x) = 3$.

6. **a)** Calculer $f'(x)$.
b) Déterminer une équation de la droite T, tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2.

7. Tracer $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{D'}$ et $\mathscr{C}$.

Voir verso

Exercice N°2: (6 points)

Soit la fonction f définie sur $[0, \pi]$ par $f(x)=\dfrac{Cos^2x}{2Cosx-1}$.

1. Déterminer le domaine de définition D de f.

2. **a)** Montrer que f est dérivable sur D et calculer $f'(x)$.

b) Vérifier que : $\forall x \in D$; $f'(x)=\dfrac{Sin2x(1-Cosx)}{(2Cosx-1)^2}$.

3. **a)** Dresser alors le tableau de variation de f sur D

b) Encadrer alors $f(x)$ pour tout $x\in[\frac{\pi}{2},\pi]$

c) Calculer : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{f(x)}{x-\frac{\pi}{2}}$ et $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{3Cos^2x+2Cosx-1}{3(x-\pi)(2Cosx-1)}$.

Exercice N°3: (6 points)

On donne $\mathscr{B}$ $=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ une base de $\mathscr{W}$, $\mathscr{R}=(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ étant un repère O.N de ξ et $A(2,-1,0)$ un point de ξ.

1. Soient les vecteurs : $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}-1\\1\\5\end{pmatrix}$. $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont -ils coplanaires ?

2. **a)** Soient les vecteurs : $\vec{e_1}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$; $\vec{e_2}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{e_3}\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}$. Prouver que $(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$ est une base de $\mathscr{W}$.

b) Soit $M(-2,6,5)$ dans le repère $\mathscr{R}$; déterminer les coordonnées du point M dans le repère $\mathscr{R}'=(A,\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$.

3. Soit un vecteur $\vec{s}\begin{pmatrix}-m-1\\2m-1\\6m+3\end{pmatrix}$ où m un paramètre réel.

a) Déterminer la valeur m pour que $\vec{s}$ et $\vec{w}$ soient colinéaires.

b) Déterminer la valeur m sachant que $\vec{s}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux.

Bon Travail